

Beispiel für eine sprachbildende Aufgabe in der Mathematik: SCHWARZFAHREN MIT DER BVG

| | | | |
|--|---|----------------------------|---|
| <i>ursprüngliche Aufgabe</i> | Katja Maaß | | |
| <i>Bearbeitung</i> | Victoria Shure, Alexander Schulte | | |
| <i>Klassenstufe</i> | 9. Klasse | Umfang: 3 U-Std. à 45 min. | |
| <i>zentrale fachliche Zielsetzung</i> | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Entwicklung von mathematischen Modellen ▪ Berechnung von jährlichen Schäden ▪ Lösungsweg finden ▪ Begründung des Lösungsweges und der Ergebnisse | Endprodukt | mündliche Präsentation der Arbeitsergebnisse (Schadensberechnung und Bewertung des Ergebnisses) |
| <i>sprachbildende Schwerpunktsetzung(en)</i> | Argumentieren: <ul style="list-style-type: none"> ▪ inhaltlicher Aufbau eines Arguments ▪ Formulierungshilfen ▪ Verteidigung eines Arguments ▪ Umgang mit anderen Lösungsansätzen | | |
| <i>benötigte Vorkenntnisse</i> | | | |
| <i>fachlich</i> | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Kenntnisse der Schritte des Modellierungskreislaufs ▪ Umgang mit großen Zahlen | | |
| <i>sprachlich</i> | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Vertrautheit mit Lesestrategien für Internetrecherche | | |

INHALT

| | |
|--|----|
| A. Sprachbildend bearbeitete Aufgabe | 2 |
| Methodenblatt: Mathematisches Argumentieren (mündlich und schriftlich) | 4 |
| B. Fachdidaktische und sprachbildende Erläuterungen | 6 |
| 1. Zur Auswahl der Lernaufgabe | 6 |
| 2. Kontext und Aufbau | 7 |
| 3. Zusammenfassung der Analyseergebnisse nach isaf | 8 |
| 4. Erläuterung zu Teilaufgaben | 10 |
| 5. Hinweise zur unterrichtlichen Gestaltung | 12 |
| 6. Hinweise zur unterrichtlichen Gestaltung | 13 |
| C. Literatur | 15 |
| D. Aufgabenanalyse nach isaf | 17 |

A. Sprachbildend bearbeitete Aufgabe

Aufgabe:

Schwarzfahren: Bagatelldelikt oder relevanter wirtschaftlicher Schaden?



©BVG / Joite

Operatoren
sind fett gedruckt

1. Gruppendiskussion und Erstellung einer Mind Map

Diskutiert das Thema „Schwarzfahren“ in euren Gruppen und **erstellt** dazu eine Mind Map.

Aktivierung des
Vorwissens

Diskutiert und **entscheidet** in euren Gruppen, wie ihr bei der Bearbeitung der Aufgabe vorgehen wollt.

sprachsensibel
formulierte und
formatierte
Arbeitsschritte

2. Vorgehensweise vorstellen

Stellt eurer Lehrerin / eurem Lehrer eure Ideen für eure Vorgehensweise **vor**.

3. Gruppenarbeit ggf. Erarbeitung in Gruppen

Gruppenarbeitsphase: Recherche in Gruppen – differenzierbar mit Lesestrategien

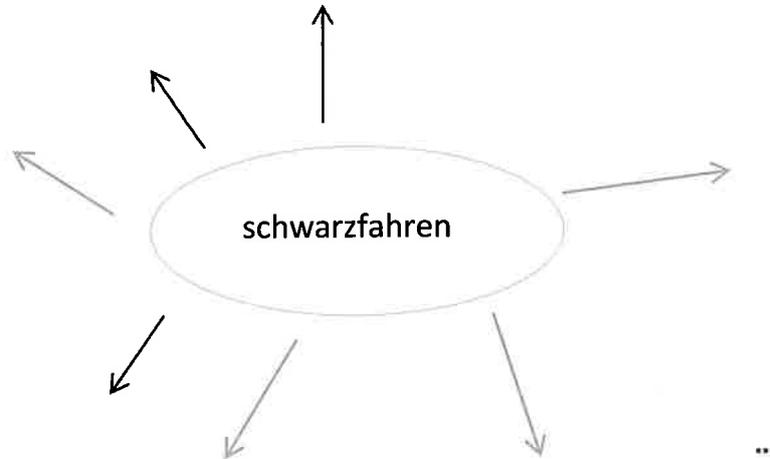
Erstellt ein Modell zur Vorgehensweise, **erklärt** euer Modell und **begründet** euer Ergebnis.

4. Ergebnispräsentation und Diskussion

Präsentiert der Klasse eure Arbeitsergebnisse. **Benutzt** dafür ein Poster, die Tafel oder ein anderes Hilfsmittel.

MIND MAP

Hilfestellung zur
Aktivierung des
Vorwissens



BEGRIFFSERKLÄRUNGEN ZUR AUFGABE

zentrale Begriffe
werden erläutert

| Begriff | Erklärung |
|---|--|
| <i>schwarzfahren, sie fahren schwarz, schwarzgefahren</i> | Schwarzfahren ist das Fahren mit den öffentlichen Verkehrsmitteln ohne gültigen Fahrausweis. Ein Fahrausweis ist zum Beispiel ungültig, wenn er nicht abgestempelt wurde oder abgelaufen ist. |
| <i>der wirtschaftliche Schaden</i> | Ein wirtschaftlicher Schaden entsteht, wenn eine Person oder eine Firma auf Grund unvorhergesehener Ereignisse Geld verliert. (Z.B. ein Fernseher in einem Geschäft fällt auf den Boden und ist kaputt/defekt. Dann entsteht dem Geschäft ein wirtschaftlicher Schaden, denn es kann mit diesem Fernseher kein Geld mehr verdienen.) |
| <i>das Bagatelldelikt</i> | Eine Handlung, die eigentlich verboten ist, aber von der Allgemeinheit als nicht so schlimm angesehen wird. |

METHODENBLATT: MATHEMATISCHES ARGUMENTIEREN (MÜNDLICH UND SCHRIFTLICH)

explizite Erklärung
plus Bsp. als
Hilfestellung
zum Argumentieren
(Unterschiede zwischen
Begründen und Erklären
mit Hinweisen zum
Aufbau eines mathematischen Arguments)

Inhaltlicher Aufbau eines mathematischen Arguments

Erklären versus begründen: „Womit kannst du uns überzeugen?“

| | |
|--|---|
| erklären: Was hast du gemacht? Wie hast du das gemacht? | begründen: Warum hast du das gemacht? Wieso funktioniert das? |
| <u>wichtige Wörter:</u> <i>zuerst, dann, danach, zunächst, am Ende, letztlich...</i> | <u>wichtige Wörter:</u> <i>weil, darum, deswegen, wegen, deshalb, da...</i> |
| <p><u>Übungsmöglichkeiten:</u> Erklären vs. begründen</p> <p>z.B.: Summen von Nachbarzahlen¹</p> <p>Mia behauptet: „Die Summe von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist stets durch zwei teilbar.“</p> <p>Hat Mia recht? Begründe deine Antwort.</p> <p><u>Hinweis</u> → erklären = <i>was</i> ich gemacht habe:</p> <ul style="list-style-type: none"> z.B.: „Ich habe 2, 3, 4 und 5 addiert und das ist gleich 14. 14 ist durch 2 teilbar. Dann habe ich 3, 4, 5 und 6 addiert und das ist 18. 18 ist auch durch 2 teilbar. Danach habe ich 4, 5, 6 und 7 addiert und das ist 22. Auch hier sieht man, dass das Ergebnis durch 2 teilbar ist. Die Summe wächst jeweils um 4.“ <p><u>Hinweis</u> → begründen = <i>wieso</i> meine Lösungswege und Lösung funktionieren:</p> <ul style="list-style-type: none"> z.B.: „Ja, Mia hat recht. Meine Antwort macht Sinn, <i>weil</i> die Summe der vier Nachbarzahlen jeweils um 4 wächst (14 auf 18 auf 22 usw.). Alle Ergebnisse der Summen sind gerade und bleiben <i>deshalb</i> immer durch 2 teilbar. Die Teilbarkeitsregel zur 2 besteht: Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer gerade (0, 2, 4, 6 oder 8) ist.“ | |



TIPP

erklären

Definition: Sachverhalte mit Hilfe eigenen Kenntnissen verständlich und nachvollziehbar machen.

begründen

Definition: Sachverhalte unter Nutzung von Regeln und mathematischen Beziehungen auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen.

¹ In Anlehnung an Blum, Werner/ Drüke-Noe, Christina/ Hartung, Ralph/ Köller, Olaf (2010). *Bildungsstandards Mathematik: Konkret: Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen* (4. Aufl.). Berlin: Cornelsen Scriptor. S. 37-38.

FORMULIERUNGSHILFEN**Mögliche Satzanfänge für die Präsentation der Argumente**Den eigenen Lösungsweg präsentieren

Wir haben diese Vorgehensweise ausgewählt, weil...

Wir haben die folgenden Annahmen verwendet, weil...

Ich kann meine Antwort mit den folgenden Informationen begründen...

Ich denke, dass ...

Anderen Lösungswegen zustimmen:

Als ich über die Aufgabe oder den Lösungsweg nachgedacht habe, habe ich festgestellt, dass ...

Ich stimme mit _____ überein, weil ...

Anderen Lösungswegen widersprechen:

Ich habe eine andere Meinung, weil ... / Ich bin anderer Meinung, weil ...

Die Idee von _____ hat mich auf die folgende Idee gebracht ...

Eine andere Vorgehensweise wäre ...

Aktives Zuhören und Beantworten – Ein diskursives Lernumfeld:**Regeln für das aktive Zuhören und Beantworten:**

- Signalisiert (mit verbalen und nonverbalen Signalen), dass ihr der Sprecherin/dem Sprecher aufmerksam zuhört.
- Lasst die Sprecherin/den Sprecher zu Ende sprechen, bevor ihr Fragen stellt oder Meinungen äußert.
- Gebt Feedback, indem ihr Fragen stellt oder zusammenfasst, was die Sprecherin/der Sprecher gesagt hat.
- Antwortet in angemessener Weise und seid dabei höflich und respektvoll.

Regeln für ein Klassengespräch:²

- Keiner fragt etwas, das eine bestimmte Antwort provozieren soll (Suggestivfrage).
- Jeder soll seine Gedanken möglichst genau formulieren.
- Jeder nimmt möglichst konkret auf die Beiträge der anderen Bezug, d. h. insbesondere
 - macht Äußerungen, die einen klaren Bezug zum Geschehen oder Gesagten haben.
 - vermeidet Wiederholungen von bereits Gesagtem, es sei denn, ihr wollt darauf aufbauen oder eure eigene Positionen davon abgrenzen.

² In Anlehnung an Fröhlich, Ines/ Prediger, Susanne (2008). Sprichst du Mathe? Kommunizieren in und mit Mathematik. In: *PM: Praxis der Mathematik in der Schule*, 50, (24), 1-8.

B. Fachdidaktische und sprachbildende Erläuterungen

1. Zur Auswahl der Lernaufgabe

Die Aufgabe „Schwarzfahren mit der BVG“ (Berliner Verkehrsbetriebe) wurde nach einer Aufgabe von Katja Maaß (2007) aus dem Buch „Mathematisches Modellieren“ entwickelt. Die ursprüngliche Aufgabe wurde für die 9. Klasse konzipiert und hat das Schätzen der jährlichen Schäden im Hinblick auf die ganze Bundesrepublik Deutschland zum Gegenstand. Die ursprüngliche Aufgabe wurde bearbeitet, um das mathematische Modellieren für die Schülerinnen und Schüler näher auf den Berliner Kontext zuzuschneiden und so das Interesse der Berliner Schülerinnen und Schüler zu wecken. Außer der Kontextänderung wurde die Aufgabe um eine Ergebnispräsentation sowie die Vorstellung der Vorgehensweise ergänzt, damit die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit erhalten, ihre Kommunikations- und Argumentationsfähigkeiten weiterzuentwickeln, die jeweils prozessbezogene Kompetenzen der Mathematik in der Sekundarstufe I sind.

Für die Sekundarstufe I wurden 2004 die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss von der Kultusministerkonferenz beschlossen. Der Berliner Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I im Fach Mathematik hat die Kompetenzen in Anlehnung an die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz übernommen. Auf Basis der Kompetenzbereiche der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss der Kultusministerkonferenz (2004) und des neuen Berliner Rahmenlehrplans für die Jahrgangsstufen 1–10 im Fach Mathematik (2015), entwickeln die Schülerinnen und Schüler die folgenden prozessbezogenen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzbereiche weiter und üben sie:

Prozessbezogene Kompetenzbereiche

- Kompetenzbereich mathematisch Argumentieren (K1): Schülerinnen und Schüler stellen Fragen, Vermutungen begründen, Argumentationen entwickeln und Lösungswege beschreiben und begründen; hier ist die Produktion (sprachlich) von Argumentationen eine Anforderung;
- Kompetenzbereich Probleme mathematisch lösen (K2): Alle Schülerinnen und Schüler wählen Fragen aus und entwickeln diese sowie Strategien, um die Fragen nach den jährlichen Schäden der BVG zu beantworten;
- Kompetenzbereich mathematisch Modellieren (K3): Die Aufgabe bietet den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, eine realitätsbezogene Situation mathematisch zu modellieren;
- Kompetenzbereich mathematische Darstellungen verwenden (K4): Schülerinnen und Schüler präsentieren ihre Ergebnisse der Aufgabe durch verschiedene Darstellungen (graphisch, symbolisch-numerisch);
- Kompetenzbereich Kommunikation (K6): Während der Aufgabe werden die Schülerinnen und Schüler verschiedene Gelegenheiten ihre eigene Ideen zu kommunizieren haben. Die Schülerinnen und Schüler kommunizieren verbal: Fragen stellen, miteinander arbeiten und reden, ihre Ergebnisse präsentieren, usw.;

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche oder Leitideen

Leitidee Zahlen und Operationen (L1): Die Schülerinnen und Schüler prüfen und interpretieren Ergebnisse in der Sachsituation unter Einbeziehung einer kritischen Einschätzung des gewählten Modells und der dazu passenden Operationen;

Leitidee Daten und Zufall (L5): Schülerinnen und Schüler sammeln und interpretieren Daten, um die jährlichen Schäden der BVG zu berechnen. Dabei benutzen die Schülerinnen und Schüler Überschlagsrechnungen.

Mathematisches Modellieren wurde in den Bildungsstandards und in dem Berliner Rahmenlehrplan als prozessbezogene Kompetenz gefasst und entspricht der Übertragung mathematischer Modelle auf alltägliche Situationen. Das Modellieren verbindet die alltägliche Welt der Schülerinnen und Schüler und die theoretische Welt der Mathematik. Die bearbeitete Aufgabe handelt vom Fahren ohne gültigen Fahrausweis bei der BVG und verbindet das alltägliche Fahren mit öffentlichen Verkehrsmitteln mit dem mathematischen Konzept der Berechnung von jährlichen Schäden.

Die Aufgabe zeichnet sich dabei durch folgende Merkmale aus:

Es handelt sich um eine authentische Modellierungsaufgabe und nicht eine eingekleidete Modellierungsaufgabe, denn die Schätzung bzw. Berechnung der jährlichen Schäden hat ein realitätsbezogenes Problem zum Gegenstand, das auf realen Daten und Fakten der BVG beruht und damit einen echten Realitätsbezug aufweist. Damit vermeidet die bearbeitete Aufgabe die Anwendung und Übung von Rechenfertigkeiten ohne wirklichen Realitätsbezug (Greefrath 2010). Laut der Aufgabenautorin Katja Maaß sind Modellierungsaufgaben von den folgenden Kriterien geprägt: offen, komplex, realistisch, authentisch, problemhaltig und durch Ausführen eines Modellierungsprozesses lösbar (Maaß 2007, 12).

Die Schülerinnen und Schüler entwickeln und erproben in dieser Aufgabe Fragen und Strategien zum Problem „Modellieren“, um die jährlichen Schäden der BVG durch Fahren ohne gültigen Fahrausweis zu errechnen. Die Schülerinnen und Schüler haben dabei die Möglichkeit, das Problem anhand von Daten sowie mithilfe der Zufallsrechnung zu modellieren und lernen dabei, wie man solche Schäden in der Wirtschaft unter Verwendung verschiedener mathematischer Modelle bestimmen kann.

Die Aufgabe ist offen und eröffnet verschiedene Möglichkeiten, sie zu lösen und über die Ergebnisse zu diskutieren. Die Vielfalt an Lösungswegen und Möglichkeiten der Ergebnispräsentation lässt den Schülerinnen und Schülern viel Raum für Kreativität. Diese Freiheit spiegelt sich in den fachlichen und sprachlichen Anforderungen wider. Insbesondere bei der Präsentation der Ergebnisse stehen die Schülerinnen und Schüler vor bestimmten sprachlichen Anforderungen, welche sie mit Hilfe sprachlicher Unterstützungsmaßnahmen bewältigen können.

2. Kontext und Aufbau

Die Aufgabe „Schwarzfahren mit der BVG“ wurde für den Einsatz in drei Einzelstunden als Projektarbeit oder über einen längeren Zeitraum konzipiert. Im Rahmen der Überarbeitung der Ursprungsaufgabe für die universitäre Lehrkräftebildung wurde die ursprüngliche Aufgabe in eine aus mehreren Arbeitsschritten bestehende Struktur transformiert, bei der die Schülerinnen und Schüler in Teamarbeit zum Schwarzfahren recherchieren und aufbauend auf verschiedenen Annahmen die jährlichen Schäden der BVG schätzen. Die Unterteilung in die im Folgenden näher zu erläuternden vier Arbeitsschritte war bei der Ursprungsaufgabe nicht vorhanden. Die Ursprungsaufgabe beschränkte sich auf die Formulierung der Fragestellung, ohne eine Struktur für das Vorgehen vorzugeben.

Bei der überarbeiteten Aufgabe erhalten die Schülerinnen und Schüler die Fragestellung zusammen mit einem Bild von einer BVG-U-Bahn Station, um ihr Vorwissen hinsichtlich des Transports mit den öffentlichen Verkehrsmitteln zu aktivieren. Die Fragestellung der überarbeiteten Aufgabe lautet: „Schwarzfahren: Bagatelldelikt oder relevanter wirtschaftlicher Schaden?“ und wird konkretisiert in den folgenden als Arbeitsschritte konzipierten Arbeitsanweisungen:

Der erste Arbeitsschritt besteht aus einer Gruppendiskussion, in der eine Mind Map zum Thema „Schwarzfahren“ erstellt wird und im Rahmen derer die Schülerinnen und Schüler entscheiden, wie sie vorgehen wollen. Dieser Schritt wurde in Ergänzung zur Ursprungsaufgabe vorangestellt, damit die Schülerinnen und Schüler ihr Vorwissen aktivieren und ihre ersten Ideen verbalisieren und sich mit den anderen Gruppenmitgliedern darüber austauschen können.

Im zweiten Arbeitsschritt stellen die Schülerinnen und Schüler der Lehrkraft ihre Vorgehensweise vor, um Feedback und Hilfestellungen zur Planung des mathematischen Modells bzw. der Vorgehensweise und deren inhaltlichen Aufbau zu bekommen.

In einem dritten Arbeitsschritt entwickeln die Schülerinnen und Schüler in Gruppenarbeit ein Modell zur Fragestellung. Bei dieser Gruppenarbeitsphase ist es wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler eine begründete Einschätzung zum Schaden durch das Schwarzfahren entwickeln. Hierbei liegt der Fokus auf der mathematischen Begründung und auf der Modellierung eines realitätsbezogenen Problems. Die Schülerinnen und Schüler werden ihre Ergebnisse zum Thema Schaden in einer von ihnen zu bestimmenden Form präsentieren: z.B. ein Plakat, eine Folie, ein erklärender Brief (ein sog. Gutachten) an die BVG mit der Schadensberechnung, einem Interview-Rollenspiel zwischen Kontrolleur oder Kontrolleurin und Fahrgast usw.

Den letzten und vierten Arbeitsschritt bilden Ergebnispräsentation und Diskussion, im Rahmen derer die Schülerinnen und Schüler der Klasse ihre Arbeitsergebnisse vorstellen. Bei der Ergebnispräsentation müssen die Schülerinnen und Schüler ihre Ideen begründet präsentieren und die anderen Schülerinnen und Schüler von ihren Ergebnissen überzeugen. Die Aufgabe lässt sich kreativ und mit einer Vielfalt unterschiedlicher Daten lösen.

3. Zusammenfassung der Analyseergebnisse nach isaf

Die Ursprungsaufgabe wurde mit *dem Instrument zur sprachbildenden Analyse von Fachaufgaben (isaf)* (Caspari et. al. 2017) analysiert, das als Basis für die Weiterentwicklung der Aufgabe in Bezug auf Inhalt und Sprachbildung dient. Die wichtigsten Ergebnisse werden im Folgenden erläutert. Für eine tiefergehende Analyse wird auf die beigefügte *isaf*-Analyse verwiesen.

In fachlicher Hinsicht besteht die Zielsetzung der Ursprungsaufgabe darin, dass die Schülerinnen und Schüler verschiedene mathematische Modelle entwickeln, mit denen die durch Schwarzfahren verursachten Kosten der Bundesrepublik Deutschland berechnet werden können. Die Schülerinnen und Schüler lernen durch die Auseinandersetzung mit einem realitätsbezogenen Problem, wie man eine solche Fragestellung modellieren kann und in welchen Situationen man statt Alltagssprache Bildungssprache verwendet.

Analyse der Aufgabenstellung

Die Analyse der Aufgabenstellung der Ursprungsaufgabe hat gezeigt, dass es möglicherweise einigen Schülerinnen und Schülern sprachlich nicht verständlich ist, (1) wie sie zur Beantwortung der Frage nach der Schadensberechnung vorgehen können und (2) in welcher Form sie ihre Einschätzung zum Schaden darstellen sollen. Aus diesem Grund wurde die Aufgabenstellung dahingehend geändert, dass durch Gruppenarbeit unter Verwendung einer Mind Map das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler aktiviert und der Arbeitsprozess durch Feedback von der Lehrperson unterstützt und strukturiert wird.

Der Ausgangstext der Ursprungsaufgabe wurde darüber hinaus umformuliert, um die Schülerinnen und Schüler zu veranlassen, ihren Lösungsweg argumentativ darzustellen und zu begründen sowie die Ergebnisse zu präsentieren. Im Zuge dessen lernen sie, Ergebnisse unter Verwendung der Bildungssprache sprachlich zu kommunizieren sowie zu argumentieren. Besonders bei der Ergebnispräsentation besteht die Herausforderung für die Schülerinnen und Schüler, Bildungs- und Fachsprache einer Argumentation zu benutzen, um ihre Ergebnisse mit Begründungen und Beweisen mathematisch zu begründen. Von besonderer Relevanz für die Bearbeitung der Aufgabe ist das mathematische Argumentieren.

Sprachliche Analyse der von den Schülerinnen und Schülern geforderten produktiven Aktivitäten

Da die Ursprungsaufgabe offen ist, eröffnet sie den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit verschiedener Lösungswege mit unterschiedlichen sprachlichen und fachlichen Anforderungen. Die Schülerinnen und Schüler können etwa ein Modell zur Berechnung des durch Schwarzfahren verursachten Schadens erstellen, bei dem sie mit Einnahmen und Verlusten arbeiten und auf bereits erworbene Kenntnisse zurückgreifen können (z.B. unter Rückgriff auf die folgenden Faktoren: Gehalt der Kontrolleure, Kosten eines Inkassobüros, Geldstrafen, Anzahl der Schwarzfahrer, Einnahmen aus bezahlten Geldstrafen, erhöhte Geldstrafen aufgrund verspäteter Zahlung, nicht bezahlte Geldstrafen). Bei diesem inhaltlichen Ansatz benutzen die Schülerinnen und Schüler Variablen nur implizit. Alternativ dazu können die Schülerinnen und Schüler die Fragestellung unter Verwendung eines algebraischen Ansatzes beantworten (z.B. mit einer von den Schülerinnen und Schülern selbst entwickelten Formel). Dazu müssen die Schülerinnen und Schüler ein komplexes und abstraktes Modell mit passender Erklärung und Begründung ihrer Berechnungen erstellen. Ein weiterer Lösungsweg besteht darin, im Rahmen einer Projektarbeit eine U-Bahn-Fahrt zu beobachten, die auf dieser Fahrt kontrollierten und erwischten Schwarzfahrer zu zählen und darauf basierend eine Schätzung der jährlichen Schäden vorzunehmen.

Ihre Ergebnisse können die Schülerinnen und Schüler in unterschiedlichen Darstellungsformen realisieren. Das Schreiben eines Briefes oder eines Gutachtens an die BVG hat etwa andere sprachliche Anforderungen (z.B. Formulierungen eines „offiziellen“ Briefes, Satzstrukturen usw.) als die mathematische Berechnung der jährlichen Schäden und die Erfassung der Ergebnisse auf einer Folie (z.B. graphische oder symbolisch-numerische Darstellungsformen, Überschlagsrechnungen mit Gesamtbevölkerung und Bevölkerungsanteilen usw.). Bei der Erstellung eines Plakates sind die sprachlichen Anforderungen ähnlich wie beim Schreiben der Berechnung auf einer Folie. Andere produktive und rezeptive sprachliche Anforderungen bestehen, wenn die Schülerinnen und Schüler ein Interview-Rollenspiel in der Klasse aufführen. Auch wenn die verschiedenen Lösungswege unterschiedliche Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler stellen, so ist der Lösungspräsentation jeweils gemein, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse vorstellen und dabei argumentieren müssen. Bei der Umformulierung der Aufgabe wurde der Fokus auf die Präsentation der unterschiedlichen Lösungswege gelegt. Unabhängig vom individuell gewählten Lösungsweg stellt die jeweilige Ergebnispräsentation damit dieselben Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler: Sie müssen in der Lage sein, ihre Ergebnisse argumentativ zu begründen.

Der Fokus der Unterstützungsmaßnahme für die bearbeitete Aufgabe liegt deshalb auf dem letzten Teil der Aufgabe, nämlich auf der Ergebnispräsentation. Hier müssen die Schülerinnen und Schüler über ihre Ergebnisse diskutieren und diese argumentativ begründen. Dieser Kompetenzbereich *mathematisch Argumentieren (K1)* erfordert die Kenntnis von spezifischen fachlichen und sprachlichen Fähigkeiten. Aus dem *Rahmenlehrplan für die Jahrgangsstufen 1-10 (2015, 19)* im Fach Mathematik werden von dem prozessbezogenen mathematischen Kompetenzbereich *Mathematisch argumentieren* die folgenden Standards von den Schülerinnen und Schülern in allen Jahrgangsstufen einschließlich der Sekundarstufe I erwartet:

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind (Gibt es ...? Wie verändert sich ...? Ist das immer so ...?)
- erkennen Zusammenhänge und Strukturen und stellen Vermutungen zu mathematischen Situationen auf
- begründen die Plausibilität von Vermutungen
- finden Beispiele oder Gegenbeispiele für mathematische Aussagen
- hinterfragen mathematische Aussagen und prüfen diese auf Korrektheit

- geben Routineargumentationen wieder
- entwickeln Begründungen zunehmend selbstständig
- entwickeln mehrschrittige Argumentationen zur Begründung und zum Beweisen mathematischer Aussagen
- erkennen, beschreiben und korrigieren Fehler, bewerten Ergebnisse bezüglich ihres Anwendungskontextes
- hinterfragen mehrschrittige Argumentationen, Begründungen und Beweise kritisch.

Die Schülerinnen und Schüler müssen nicht nur ihre Vorgehensweise darstellen, sondern auch mathematisch argumentieren, warum sie die jeweiligen Schritte oder Berechnungen gewählt haben. Diese Fähigkeiten sind Teil eines diskursiven Mathematik-Lernumfelds. Das „Methodenblatt: mathematisches Argumentieren“ dient den Schülerinnen und Schülern als Hilfestellung, um ihre Arbeitsergebnisse zu begründen und über diese zu diskutieren. Dabei liegt der Fokus der Unterstützung auf

- dem inhaltlichen Aufbau eines Arguments
- Formulierungshilfen, um ein Argument aufzubauen
- der Verteidigung eines Arguments und
- dem Umgang mit anderen Lösungsansätzen.

Die Schülerinnen und Schüler müssen über ihre und die Ergebnisse anderer Schülerinnen und Schüler diskutieren können bzw. ihre Ideen strukturieren sowie erklären und begründen und auf die Ideen von anderen reagieren. Dabei entwickeln sie metakognitive Denkprozesse und die Fähigkeit zum logischen mathematischen Denken. In der Mathematik ist der Schlüssel das Argumentieren, d.h. warum man etwas macht (mit Begründungen und Beweisen). Die sprachlichen Anforderungen beim Argumentieren müssen explizit gelehrt werden, damit die Schülerinnen und Schüler über Logik und Berechnungen sprechen können. Mehrere Studien haben gezeigt, dass es sich positiv auf die Entwicklung des mathematischen Denkens der Schülerinnen und Schüler auswirkt, wenn den Schülerinnen und Schülern regelmäßig die Gelegenheit gegeben wird, im Mathematikunterricht zu argumentieren (z.B., Carpenter/ Lehrer 1999, Cobb/ Boufi/ McClain/ Whitenack 1997, Empson 2003, Goos 2004, Lampert 1990, O'Connor 2001, White 2003, Wood/ McNeal 2003, Zack/ Graves 2002). Außerdem zeigen diese Studien, dass es das mathematische Denken der Schülerinnen und Schüler stärkt, wenn diese ihre Ideen begründen (Walshaw/ Anthony 2008, Woodward/ Irwin 2005).

4. Erläuterung zu Teilaufgaben

Bei der sprachbildenden Überarbeitung der Aufgabe wurde der sprachbildende Schwerpunkt auf die Produktion bzw. auf die begründete Ergebnispräsentation gelegt. Die Aufteilung der Aufgabe in die verschiedenen Schritte ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern, sich bei inhaltlich gleichbleibender Aufgabe miteinander auszutauschen und ihre Ideen sprachlich zu kommunizieren, anstatt die Aufgabe alleine ohne sprachliches Feedback oder sprachliche Unterstützung bewältigen zu müssen. Im Folgenden werden die sprachbildenden Hilfestellungen in den einzelnen Teilaufgaben bzw. Arbeitsschritten erläutert.

Teilaufgabe 1: Gruppendiskussion und Erstellung einer Mind Map

Bei dem ersten Arbeitsschritt, in dem die Schülerinnen und Schüler ihre ersten Ideen und ihre Vorgehensweise diskutieren, können sie sich insbesondere für Formulierungshilfen für Satzanfänge sowie für den Umgang mit anderen Lösungsansätzen auf das Methodenblatt beziehen. Das Methodenblatt unterstützt die Schülerinnen und Schüler in sprachlicher Hinsicht dabei, ihre Ideen und Ergebnisse zu diskutieren und zu präsentieren. Oftmals benötigen sie Anregungen, wie sie ein Argument formulieren können. Satzanfänge können den Schülerinnen und Schülern dabei als Hilfsmittel dienen, um ihre eigenen Ideen vorzustellen. So können sie Argumente einfacher formulieren und präsentieren. Die Schülerinnen und Schüler können sich darüber hinaus weitere Satzanfänge überlegen. Außerdem erhalten die Schülerinnen und Schüler sprachrelevante Verhaltenshinweise zur Verteidigung eines Arguments sowie zur Interaktion mit anderen Schülerinnen und Schülern. Diese Fähigkeiten müssen die Schülerinnen und Schüler explizit erlernen und regelmäßig üben. Durch die Erstellung einer Mind Map erhalten die Schülerinnen und Schüler eine wichtige Hilfestellung bei der Organisation der Inhalte der Aufgabe. Insgesamt müssen sich die Schülerinnen und Schüler auf diese Weise mit dem Konzept „Schwarzfahren“ auseinander setzen und ihr Vorwissen aktivieren, bevor sie ein mathematisches Modell entwickeln.

Teilaufgabe 2: Vorgehensweise vorstellen

Im zweiten Arbeitsschritt ist es wichtig, dass die Gruppen mit der Lehrkraft ins Gespräch kommen und ihre Ideen präsentieren. Dieser Schritt erfolgt nicht vor der Klasse sondern zwischen den jeweiligen Gruppen und der Lehrkraft, damit sich die Schülerinnen und Schüler auf ihre eigenen Ideen konzentrieren und nicht vorschnell die Ideen anderer Gruppen übernehmen. Denn die Aufgabe bietet die Möglichkeit, kreative Lösungswege zu entdecken. Im Gespräch mit der Lehrkraft erhalten die Schülerinnen und Schüler weiterführende Anregungen und haben so die Möglichkeit, ihre eigenen Lösungswege zu finden.

teilaufgabe 3: Gruppenarbeit ggf. Erarbeitung in Gruppen

Bei der Gruppenarbeit können die Schülerinnen und Schüler erneut auf das Methodenblatt zurückgreifen, um sich den Unterschied zwischen den Operatoren „begründen“ und „erklären“ zu vergegenwärtigen und ihre Ideen zu begründen und zu erklären. Die Formulierung „Begründet Eure Einschätzung“ führt dazu, dass das Begründen im Fokus steht. Als Hilfestellung gibt es Teil 1 des Methodenblatts, in dem der Unterschied zwischen dem deskriptiven Erklären und dem argumentativen Begründen unter Verwendung von mathematischen Regeln und Beziehungen erläutert wird. Damit wird den Schülerinnen und Schülern gezeigt, dass es nicht genügt, ein mathematisches Ergebnis einfach nur zu behaupten, sondern dass über eine Erklärung hinaus eine Begründung erforderlich ist. Sie sollen erkennen, dass der Schlüssel eines mathematischen Arguments die Begründung ist. Wenn die Schülerinnen und Schüler die Klasse von ihren Lösungen oder Ideen überzeugen möchten, müssen sie daher sowohl die Technik des deskriptiven Erklärens als auch die des Begründens benutzen – schließlich sind beide Aspekte Teil eines mathematischen Arguments. Es sollte deshalb unbedingt sichergestellt werden, dass die Schülerinnen und Schüler diesen Unterschied erkennen und nicht nur wissen, wie sie ihre Argumentationen erklären, sondern auch, wie sie diese mit Begründungen unterstützen. Als Übung für das begründete Argumentieren können die Schülerinnen und Schüler in Gruppen- oder Partnerarbeit anhand einer Beispielaufgabe aus dem Methodenblatt die Lösung/Lösungswege erklären und begründen.

Durch die sprachliche Unterstützung bei der Differenzierung zwischen Erklären und Begründen werden die Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt, ihre Lösungswege zu reflektieren: Wenn sie den Lösungsweg mit Begründungen oder Beweisen nicht unterstützen können, müssen sie nachdenken und einen anderen Lösungsweg ausprobieren. Weitere Hilfestellungen erhalten die Schülerinnen und Schüler in Teil 2 des Methodenblatts, in dem ihnen Beispiele für Satzanfänge für die Erörterung ihrer Ideen an die Hand gegeben werden. Das Methodenblatt verdeutlicht den

Schülerinnen und Schülern, dass es wichtig ist, dass sie ihre mathematischen Begründungen unterstützen und wie sie dies sprachlich zum Ausdruck bringen können. Dabei werden sprachliche und fachliche Anforderungen verbunden.

Teilaufgabe 4: Ergebnispräsentation und Diskussion

Auch hier können sich die Schülerinnen und Schüler auf das Methodenblatt beziehen, das ihnen Hilfestellungen für die Diskussion der Lösungen und Ergebnisse gibt. Das Methodenblatt zeigt den Schülerinnen und Schülern, wie sie ihre eigenen Ideen inhaltlich strukturieren, präsentieren und argumentativ verteidigen können und wie sie mit den Lösungsansätzen der anderen Schülerinnen und Schüler angemessen umgehen. Es hat sich gezeigt, dass die Fähigkeit zum angemessenen Umgang mit anderen explizit gelehrt werden muss, um die Schülerinnen und Schüler in die Lage zu versetzen, respektvoll miteinander umzugehen und Ideen auszutauschen (Yackel/ Cobb 1996).

5. Hinweise zur unterrichtlichen Gestaltung

Es bestehen mehrere Möglichkeiten, die Aufgabe sprachlich zu differenzieren. Die folgenden Differenzierungsmöglichkeiten und Alternativen basieren zum Teil auf zwei Beobachtungen von Berliner Schulklassen bei der Erprobung der Aufgabe. Darüber hinaus bauen weitere Differenzierungsmöglichkeiten auf den unterschiedlichen Modellierungsmodellen auf, die für verschiedene Schülerinnen und Schüler benutzt werden können. Abschließend wird eine Zusatzaufgabe als Differenzierungsmöglichkeit präsentiert.

5.1 Differenzierungsmöglichkeiten nach den zwei Klassenbeobachtungen

Bei den beiden Schulbeobachtungen hat sich deutlich gezeigt, wie unterschiedlich die einzelnen Gruppen in den jeweiligen Klassen gearbeitet haben. Einigen Schülerinnen und Schülern kam die Freiheit und Offenheit der Aufgabe entgegen, während andere insbesondere bei der Deutung der Fragestellung mehr Unterstützung benötigten. Es wurde der Vorschlag gemacht, Sprechblasen mit Anregungsfragen (z.B. Wie viele Fahrgäste sind im letzten Jahr mit der BVG gefahren? Oder: Wie viele Schwarzfahrer sind im letzten Jahr erwischt worden?) für diejenigen Schülerinnen und Schüler aufzunehmen, die Schwierigkeiten beim Verstehen der Aufgabefragestellung haben. Außerdem wäre die alternative Frage: „Wem schadet Schwarzfahren?“ eine mögliche Fragestellung für weitere Differenzierung. Damit erhalten die Schülerinnen und Schüler eine sprachliche Anregung, auf Grundlage derer sie eigenständig den Modellierungskreislauf anfangen und durchlaufen können.

Bei den Beobachtungen ist ferner deutlich geworden, dass die Idee des mathematischen Argumentierens mit Begründungen nicht allen Schülerinnen und Schülern vertraut war. Um diese Fähigkeiten auszubauen, ist es wichtig, das mathematische Argumentieren sowie den Umgang mit anderen Lösungsansätzen regelmäßig und nicht nur bei dieser Aufgabe explizit zu üben. Es wurde in mehreren Studien gezeigt, dass viele Schülerinnen und Schüler, insbesondere diejenigen, die aus benachteiligten Familien kommen, nur zurückhaltend am Mathematik-Klassendiskurs teilnehmen, weil sie Schwierigkeiten bei der Unterscheidung zwischen mathematisch passenden und abwegigen Lösungen haben und deshalb aufgeben (Lubienski 2002). Es ist deshalb notwendig, die Grundsätze des Diskurses und der Argumentation sowie deren Regeln in den Unterricht zu integrieren, um die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht, bei dem das Begründen und das Befolgen von Verhaltensregeln von besonderer Bedeutung ist, zu sozialisieren (Popkewitz 1988, Walshaw/ Anthony 2008). Eine weitere Möglichkeit, um diese Fähigkeiten regelmäßig zu unterstützen, ist die Erstellung bzw. Verwendung eines Plakats mit der Struktur eines mathematischen Arguments (mit der Entwicklung einer Behauptung, der Begründung dieser Behauptung und mit den Schlussfolgerungen). Auf dieses Anschauungsmaterial können die Schülerinnen und Schüler als Unterstützung beim Erlernen des mathematischen Argumentierens zurückgreifen.

5.2 Unterschiedliche Modellierungsmodelle

Als weitere sprachbildende Differenzierungsmöglichkeit kann auf die verschiedenen Modellierungsmodelle zur Unterstützung vielfältiger Schülerinnen und Schüler zurückgegriffen werden. Die verschiedenen Modelle (z.B. Blum 1985, Blum/ Leiß 2005, Maaß 2007, Ortlieb et al. 2009) und Schemata (z.B. „Modellieren“ im MatheNetz von Cukrowicz/ Theilienberg/ Zimmermann 2008, „PADEK“ in Mathewerkstatt von Prediger/ Barzel/ Hußmann/ Leuders 2013, „Sachsituationen schrittweise lösen“ in Mathematik Denken und Rechnen von Golenia/ Neubert, 2005, „Instrument Lösungsplan“ im Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht von Leiß/ Tropper 2014) bieten zahlreiche Möglichkeiten, um die Aufgabe den Voraussetzungen der unterschiedlichen Schülerinnen und Schülern entsprechend zu mathematisieren. Es existieren verschiedene Varianten von Modellierungsmodellen, jeweils mit unterschiedlichen Komplexitäts- und Abstraktionsgraden sowie unterschiedlichen sprachlichen Anforderungen.

5.3 Zusatzaufgabe als weitere Differenzierungsmöglichkeit

Als weitere Differenzierungsmöglichkeit kann den Schülerinnen und Schülern eine Zusatzaufgabe in Gestalt eines Lerntagebuchs über das optimale Verhältnis zwischen BVG-Kontrolleuren und Fahrgästen ohne gültigen Fahrausweis gestellt werden. Die Schülerinnen und Schüler können dabei in Eigenarbeit über die Frage nachdenken und sie beantworten. Bei dieser Zusatzaufgabe reproduzieren die Schülerinnen und Schüler ihre Gedanken und Begründungen in schriftlicher Form. Hierbei erhalten sie die Gelegenheit, diese Fähigkeiten bzw. die Verschriftlichung der mathematischen Argumentation zu üben und weiterzuentwickeln.

6. Hinweise zur unterrichtlichen Gestaltung

Die Aufgabe kann z.B. in den folgenden Phasen durchgeführt werden:

PHASE 1

Aufgabe vorstellen, mit der Klasse diskutieren und Vorwissen aktivieren:

- a. Das Phänomen des Fahrens ohne gültigen Fahrausweis (Schwarzfahren) wird im Plenum erörtert. Im Anschluss daran wird die Aufgabe vorgestellt und diskutiert.
- b. Allgemeine Verständnisfragen zu der Aufgabe werden beantwortet.
- c. Die Schülerinnen und Schüler werden in Gruppen aufgeteilt und diskutieren das Thema „Schwarzfahren“. Als Hilfestellung zur Aktivierung des Vorwissens erstellen sie eine Mindmap zum „Schwarzfahren“ und bringen ihre Überlegungen dann ins Plenumsgespräch ein.

PHASE 2

Vorgehensweise auswählen:

- a. Als Vorbereitung für die Gruppenarbeit erläutert die Lehrkraft das „Methodenblatt Mathematisches Argumentieren in verbaler und schriftlicher Form“ und gibt es den Schülerinnen und Schülern als Hilfsmittel für die Zusammenarbeit.
- b. Die Schülerinnen und Schüler diskutieren und entscheiden in ihren Gruppen, wie sie vorgehen wollen.

PHASE 3

Gruppendifferenzierte Arbeit:

- a. Die Schülerinnen und Schüler stellen in Gesprächen mit der Lehrkraft ihre Ideen für ihre Vorgehensweise vor.
- b. Die Schülerinnen und Schüler recherchieren und berechnen danach in den Gruppen im Computerraum (oder mit Handys) die Einnahmen und Schäden der BVG. Dabei verwenden Schülerinnen und Schüler Lesestrategien für ihre Recherche (z.B. die Texte bildnerisch/ grafisch umsetzen; kooperatives Arbeiten „Think-Pair-Share“; die Texte zum Thema vergleichen; ihre Fragen gezielt beantworten usw.).
- c. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln in den Gruppen ihre Modelle bzw. berechnen die Schäden und führen die Ergebnisse zusammen, die sie ausgewählt haben (möglicherweise in verschiedenen Darstellungsformen, insbesondere grafisch, symbolisch-numerisch usw.).

PHASE 4

Präsentation und Diskussion:

- a. Als Vorbereitung für die Präsentationen erläutert die Lehrkraft insbesondere Teil 3 des „Methodenblatts Mathematisches Argumentieren in verbaler und schriftlicher Form“ und geht dieses mit den Schülerinnen und Schülern als Hilfsmittel für den Umgang mit anderen Lösungsansätzen für die Diskussion der Ergebnisse durch.
- b. Die Schülerinnen und Schüler präsentieren der Klasse in ihren Gruppen ihre Ergebnisse.
- c. Die Ergebnisse der einzelnen Präsentationen werden im Plenum diskutiert. Die Schülerinnen und Schüler können auch Wortkarten mit Formulierungshilfen (aus dem Methodenblatt) als Hilfsmittel für die Diskussion benutzen, was bei der Fokussierung auf fachsprachliches und bildungssprachliches Sprechen hilft, z.B. auf den lexikalischen und syntaktischen Ebenen: „Wir stellen fest, dass..., Wir haben herausgefunden, dass..., Wir haben ___ gemacht, weil..., Ich stimme mit ___ überein, weil..., Wir haben diese Vorgehensweise ausgewählt, weil..., Ich habe eine andere Meinung, weil...“).

C. Literatur

- Blum, Werner (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte* 32 (2), 195-232.
- Blum, Werner / Drücke-Noe, Christina / Hartung, Ralph / Köller, Olaf (2010). *Bildungsstandards Mathematik: Konkret: Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen*. 4. Auflage. Berlin: Cornelsen Scriptor, 37-38.
- Blum, Werner / Leiß, Dominik (2005): Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. In: *mathematik lehren* H. 128, 18-21.
- Caspari, Daniela / Andreas, Torsten / Schallenberg, Julia / Shure, Victoria / Sieberkrob, Matthias (2017). Instrument zur sprachbildenden Analyse von Aufgaben im Fach. In: Caspari, Daniela (Hg.). *Sprachbildung in den Fächern: Aufgabe(n) für die Fachdidaktik. Materialien für die Lehrkräftebildung*. Berlin.
- Carpenter, Thomas / Lehrer, Richard (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In: Fennema, E. / Romberg, T. (Hg.), *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 19-32.
- Cobb, Paul / Boufi, Ada / McClain, Kay / Whitenack, Joy (1997). Reflective discourse and collective reflection. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 28, 258-277.
- Cukrowicz, Jutta / Kalenberg, Heinz / Theilenberg, Joachim / Zimmermann, Bernd (2008). *MatheNetz 8 Gymnasium*. Braunschweig: Westermann.
- Empson, Susan (2003). Low performing students and teaching traactions tor understanding: An interactions analysis. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 34, 305-343.
- Fröhlich, Ines / Prediger, Susanne. (2008). Sprichst du Mathe? Kommunizieren in und mit Mathematik. *PM : Praxis der Mathematik in der Schule* 50, 24, 1-8.
- Golenia, Jürgen / Neubert, Kurt (2005). *Mathematik - Denken und Rechnen*. Braunschweig: Westermann.
- Goos, Merrilyn (2004). Learning mathematics a classroom community of inquiry. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 35, 258-291.
- Greefrath, Gilbert (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum.
- Lampert, Magdalene (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. In: *American Educational Research Journal* 27, 29-63.
- Leiß, Dominik / Tropper, Natalie (2014). *Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht: Adaptives Lehrerhandeln beim Modellieren*. Heidelberg: Springer.
- Lubienski, Sarah T. (2002). Research, reiform, and equity in U.a. mathematics education. In: *Mathematical Thinking and Learning* 4, 103-125.
- Maaß, Katja (2007). *Praxisbuch: Mathematisches Modellieren, Aufgaben für die Sekundarstufe I*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- O'Connor, Mary (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of the mathematical group discussion. In: *Educational Studies in Mathematics* 46, 143-1 85.
- Ortlieb, Claus Peter / v. Dresky, Caroline / Gasser, Ingenuin / Günzel, Silke (2009). *Mathematische Modellierung. Eine Einführung im zwölf Fallstudien*. Wiesbaden: Vieweg.
- Popkewitz, Thomas (1988). Institutional issues in the study of school mathematics: Curriculum research. In: Bishop, A. J. (Hg.): *Mathematics education and culture*. Dordrecht (NL): Kluwer, 221-249.
- Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo (2013). *Mathewerkstatt. Klasse 6*. Berlin: Berlin: Cornelsen.
- Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. München: Wolters Kluwer.

- Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft Berlin / Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (2015). Rahmenlehrplan für die Jahrgangsstufen 1–10. Teil C: Mathematik. Berlin, Potsdam.
- Walshaw, Margaret / Anthony, Glenda (2008). The Teacher's Role in Classroom Discourse: A Review of Recent Research Into Mathematics Classrooms. In: *Review of Educational Research* 78 (3), 516-551.
- White, Dorothy (2003). Promoting productive mathematical classroom discourse. In: *Journal of Mathematical Behavior* 22, 37-53.
- Wood, Terry / McNeal, Betsy (2003). Complexity in teaching and children's mathematical thinking. In: Pateman, N. / Dougherty, B. / J. Zilliox (Hg.). *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Band 4)*. Honolulu, HI: PME & PMENA, 435-441.
- Woodward, Joanne / Irwin, Kathryn (2005). Language appropriate for the New Zealand numeracy project. In: Clarkson, P. / Downton, A. / Gronn, D. / Home, M. / McDonough, A. / Pierce, R. et al. (Hg.): *Building connection: Theory, research and practice. Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (Band 2)*. Sydney: MERGA, 799-806.
- Yackel, Erna / Cobb, Paul (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 27 (4), 458.
- Zack, Vicki / Graves, Barbara (2002). Making mathematics meaning through dialogue: "Once you think of it, the z minus three seems pretty weird." In: *Educational Studies in Mathematics* 46, 229-271.

D. Aufgabenanalyse nach *isaf*

Ergebnisse der Analyse der ursprünglichen Aufgabe mit dem Instrument zur sprachbildenden Analyse von Aufgaben im Fach (*isaf*)³

Zu analysierende Aufgabe:

| | | | |
|--|---|---------|---------------|
| <i>Autor/in</i> | Katja Maaß | Titel | Schwarzfahren |
| <i>Fundstelle</i> | Maaß, Katja (2007). <i>Praxisbuch: Mathematisches Modellieren, Aufgaben für die Sekundarstufe I</i> . Berlin: Cornelsen Scriptor: 166. | | |
| <i>Klassenstufe</i> | 9. Klasse | Umfang: | 3 U-Std. |
| <i>benötigte Vorkenntnisse und Kompetenzen</i> | | | |
| <i>fachlich</i> | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Kenntnisse der Schritte des Modellierungskreislaufs ▪ Umgang mit großen Zahlen | | |
| <i>sprachlich</i> | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Vertrautheit mit Lesestrategien für Internetrecherche | | |

³ *isaf* = Instrument zur sprachbildenden Analyse von Aufgaben im Fach, entwickelt von Daniela Caspari, Torsten Andreas, Julia Schallenberg, Victoria Shure, Matthias Sieberkrob (2017).

A Fachdidaktische Analyse der Aufgabe

Grundlage der sprachbildenden Analyse ist die fachdidaktische Analyse der Aufgabe:
Was sollen die Schülerinnen und Schüler (SuS) mit Hilfe der Aufgabe lernen?

| | |
|--|--|
| | Teilaufgabe 1 |
| <p>Schritt 1: Aus welchen Teilaufgaben setzt sich die Aufgabe zusammen?</p> | Die Berechnung des Schadens der Bundesrepublik Deutschland durch Schwarzfahren. |
| <p>Schritt 2: Welche Funktion kommt der jeweiligen Teilaufgabe zu?</p> | <p>Verständnis der Fragestellung</p> <p>Berechnung des Schadens unter Verwendung von mathematischen Modellen</p> |
| <p>Schritt 3: Welche Kompetenzen sollen mit dieser Aufgabe erworben bzw. vertieft werden?</p> | <p>Kompetenzbereich Probleme mathematisch lösen (K2): Alle Schülerinnen und Schüler werden Strategien identifizieren und entwickeln, um die Frage der Schäden zu beantworten.</p> <p>Kompetenzbereich mathematisch Modellieren (K3): Die Lernaufgaben bieten den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, eine realitätsbezogene Situation mathematisch zu modellieren.</p> <p>Kompetenzbereich Mathematische Darstellungen verwenden (K4): Schülerinnen und Schüler werden ihre Ergebnisse der Lernaufgaben durch verschiedene Darstellungsformen (graphisch, symbolisch-numerisch) darstellen.</p> <p>Leitidee Zahl (L1): Schülerinnen und Schüler werden Ergebnisse in der Sachsituation unter Einbeziehung einer kritischen Einschätzung des gewählten Modells prüfen und interpretieren.</p> <p>Leitidee Daten und Zufall (L5): Schülerinnen und Schüler werden Daten sammeln und interpretieren, um den Schaden zu errechnen. Dabei werden die Schülerinnen und Schüler Überschlagsrechnungen verwenden.</p> |
| <p>Schritt 4: Was müssen die SuS im Einzelnen leisten, um die Aufgabe zu bewältigen?</p> | <p>Die Fragestellung verstehen.</p> <p>Strategien zur Problemlösung entwickeln.</p> <p>Einen Modellierungskreislauf / Strategie auswählen.</p> <p>Recherche zum Thema sowie Ordnung und Interpretation der Daten und Überschlagsrechnungen der recherchierten Daten.</p> <p>Texte (durch Recherche) zum Schwarzfahren verstehen und Inhalt mathematisieren bzw. übersetzen.</p> <p>Einen Modellierungskreislauf anwenden bzw. die Realsituation in ein mathematisches Modell übersetzen.</p> <p>Zusammenstellung der Ergebnisse unter Verwendung verschiedener Darstellungsformen (grafisch, symbolisch-numerisch).</p> <p>Ergebnisse in verschiedenen Darstellungsformen verständlich darstellen.</p> |

B Rezeption: Sprachliche Analyse der in der Aufgabe verwandten schriftlichen Texte

Nun untersuchen Sie die Texte, die die SuS in der Aufgabe bearbeiten müssen, auf ihre sprachlichen Besonderheiten (z.B. Lehrwerkstexte, Quellen, Informationstexte, Zeitungsartikel, Interviews). Dies hilft Ihnen, später die Punkte zu identifizieren, an denen Ihre SuS möglicherweise Schwierigkeiten haben könnten.

| | <i>Text 1: Ausgangstext</i> | <i>Text 2: Recherche mit unterschiedlichen Texten</i> |
|--|---|--|
| <p>Schritt 1:</p> <p>Welches Ziel ist mit dem Lesen des Textes verbunden?</p> <p>Wofür sollen die Informationen aus dem Text im weiteren Verlauf der Aufgabe verwendet werden?</p> | <p>Für die Bearbeitung der Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler den Ausgangstext der Aufgabe verstehen. Dieser Text diskutiert die Idee des Schwarzfahrens und erklärt es als Delikt.</p> <p>Von diesem Ausgangstext müssen die Schülerinnen und Schüler verstehen, dass sie den Schaden in ganz Deutschland berechnen müssen und dabei Recherche zum Thema machen, z.B. wie hoch die Kosten der öffentlichen Verkehrssysteme in verschiedenen Städten sind, wie viele Fahrgäste in verschiedenen Städten durchschnittlich fahren und die Schätzungen der Zahl der Schwarzfahrer und Schwarzfahrerinnen.</p> | <p>Die Schülerinnen und Schüler müssen über den Schaden recherchieren und dadurch verschiedene Texte lesen, um die Kosten zu errechnen und die Frage zu beantworten, wie viel Schaden durch Schwarzfahren entstanden ist.</p> <p>Die Texte, welche die Schülerinnen und Schüler lesen werden, sind für die Beantwortung der Fragestellung notwendig, also für die Erreichung eines Ergebnisses und einer Antwort auf die Frage der Aufgabe.</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler werden Texte zu Annahmen, zu Verlusten und Gewinnen der verschiedenen öffentlichen Verkehrssysteme und zu Informationen über Passagiere und Schwarzfahrer lesen.</p> |
| <p>Schritt 2:</p> <p>Um welche Textsorte handelt es sich?</p> <p>Welche (typischen) Textsortenmerkmale weist dieser Text auf?</p> | <p>Ausgangstext</p> <p>Enthält Informationen, um das Vorwissen zu aktivieren</p> <p>Fragestellung ist enthalten</p> | <p>Schülerinnen und Schüler werden zum Thema recherchieren, um ihre Fragen zu beantworten und dabei die Schäden zu schätzen.</p> <p>Die Schülerinnen- und Schüler-Gruppen werden deshalb verschiedene Strategien benutzen und dabei unterschiedliche Textsorten verwenden:</p> <p>Mögliche Texte sind:</p> <p>Berichte → berichtend</p> <p>Interviews → erzählend, argumentierend</p> <p>Tabellen → berichtend</p> <p>Informationstexte → berichtend</p> <p>Pressemitteilungen → berichtend, beschreibend</p> |

| | <i>Text 1: Ausgangstext</i> | <i>Text 2: Recherche mit unterschiedlichen Texten</i> |
|---|---|--|
| <p>Schritt 3: bei Text-Bild-Kombinationen: Welche Funktionen haben die Abbildungen, welche der Text?</p> | <p>Die Aufgabe enthält ein Bild von einem U-Bahn Bahnsteig. Das Bild hilft dabei, das Vorwissen zu aktivieren.</p> | <p>In der Recherchephase müssen Schülerinnen und Schüler auch diskontinuierliche Texte (z.B. Tortendiagramme oder Balkendiagramme) verwenden und die Informationen in eine andere Darstellungsform übertragen. Die Informationen betreffen z.B. die Anzahl der Passagiere pro Jahr oder der Schäden des jeweiligen öffentlichen Verkehrssystems.</p> |
| <p>Schritt 4: Welcher Wortschatz ist für das Textverständnis und für die Gesamtaufgabe zentral? Welche Wörter und Formulierungen können das von der Aufgabe intendierte Textverstehen besonders beeinträchtigen? (Achtung: Nicht alle „schwierigen“ Wörter sind für das Textverstehen relevant.)</p> | <p>fachsprachlicher Wortschatz, bildungssprachlicher Wortschatz, alltagssprachlicher Wortschatz Begriffe: z.B. Schwarzfahren, Fahrausweis, Delikt, Beförderungserschleichung, Urkundenfälschung, Straftat, Schaden, Fahrscheinkontrolle, Einnahmen</p> | <p>fachsprachlicher Wortschatz, bildungssprachlicher Wortschatz, alltagssprachlicher Wortschatz (es kommt darauf an, was für einen Text die Schülerinnen und Schüler lesen) Die Schülerinnen und Schüler müssen mathematische Begriffe verstehen, die mehrere Bedeutungen und eine spezifische mathematische Bedeutung haben; Idiome, die auch spezifisch für die Mathematik sind; Präpositionen, die spezifisch für die Mathematik sind. Begriffe: z.B. Schwarzfahren, Fahrausweis, Straftat, Kontrolleur/ Kontrolleurin, Schaden, Fahrscheinkontrolle, Annahmen, Verlust, Gewinn</p> |
| <p>Schritt 5: Welche grammatischen Strukturen sind für das Textverständnis und für die Gesamtaufgabe zentral? Welche grammatischen Strukturen können das von der Aufgabe intendierte Textverstehen beeinträchtigen?</p> | <p>Nominalisierungen Passiv</p> | <p>hängt von dem jeweiligen Text ab</p> |
| <p>Schritt 6: Welche spezifischen Lesestile wären für die Bearbeitung der Aufgabe zielführend? Welche Strategien / Methoden wären für die Bearbeitung der Aufgabe hilfreich?</p> | <p>selektives Lesen → erster Absatz als Aktivierung von Vorwissen, Fragestellung kommt erst am Ende der Aufgabe</p> | <p>hängt von dem jeweiligen Text ab → auf Lesestrategien zur Informationsbeschaffung hinweisen, z.B. Verwendung einer Tabelle oder einer Mindmap mit recherchierten Infos</p> |

C Produktion: Sprachliche Analyse der von den Schülerinnen und Schülern geforderten produktiven Aktivitäten

Hier untersuchen Sie, welche sprachlichen Anforderungen die in der Aufgabe verlangten produktiven Aktivitäten (z.B. Inhalt wiedergeben, diskutieren, erläutern) bzw. Produkte (z.B. eine Tabelle ausfüllen, ein Plakat erstellen, ein Bild beschreiben, einen Vortrag halten) an die SuS stellt.

D Analyse der Aufgabenstellung

Nun analysieren Sie die Aufgabenstellung auf der Basis der Analyseergebnisse aus A, B und C. Achtung: In der Aufgabenstellung stecken die Schwierigkeiten häufig im Detail.

| | ggf. nach Teilaufgaben differenzieren |
|---|--|
| <p>Schritt 1:</p> <p>Ist die Aufgabe verständlich?</p> <p>Ist die Aufgabe klar und eindeutig formuliert?</p> <p>Ist die Aufgabe fachlich angemessen und sprachlich dem Kenntnisstand der SuS entsprechend formuliert?</p> <p>Ggf.: Sind die einzelnen Schritte klar erkennbar? (Gliederung)</p> <p>Ist die Aufgabe in sich schlüssig?</p> | <p>Die einzelnen Schritte sind nicht so deutlich klar erkennbar – die Schülerinnen und Schüler müssen den Schaden für die ganze BRD berechnen.</p> <p>Weder die Aufgabe noch die Fragestellung liefern eine klare Einleitung, wie die Schülerinnen und Schüler vorgehen oder die Ergebnisse am Ende darstellen sollen.</p> |
| <p>Schritt 2:</p> <p>Ist die Aufgabe transparent?</p> <p>Werden die fachlichen und sprachlichen Ziele deutlich?</p> <p>Werden klare Erwartungen an das Endprodukt formuliert?</p> <p>Wenn notwendig: Gibt es Raum für eine sprachliche Reformulierung der Aufgabe durch die SuS?</p> | <p>Die fachlichen und sprachlichen Ziele sind nicht deutlich erkennbar. Erwartungen sind nicht klar formuliert.</p> <p>Es gibt Raum für eine sprachliche Überarbeitung der Aufgabe, die das fachliche Lernen dabei unterstützt.</p> |
| <p>Schritt 3:</p> <p>Gibt es in der Aufgabenstellung bereits Hilfestellungen zur Bearbeitung?</p> <p>Werden Hinweise zum methodischen Vorgehen gegeben?</p> | <p>Die Aufgabe enthält weder Hilfestellungen zum Vorgehen noch zum Verstehen der Fragestellung.</p> <p>Hinweise zum methodischen Vorgehen sind nicht vorhanden.</p> |

| | |
|--|---|
| <p>Wie könnte die Planung und Organisation des angestrebten Produkts unterstützt werden?</p> <p>Wie könnte die Umsetzung des angestrebten Produkts unterstützt werden?</p> <p>Wie könnte der Überarbeitungsprozess des Produkts angeleitet werden?</p> <p>Welche Korrekturhilfen könnten zielführend sein?</p> | <p>Unterstützungsmaßnahmen:</p> <p>Es könnte durch Formulierungshilfen für die Begründung von Ergebnissen unterstützt werden.</p> <p>Es könnte durch Feedback zur Vorgehensweise unterstützt werden.</p> |
| <p>Schritt 3 (vgl. Teil D):</p> <p>Überprüfen Sie nun noch, ob die Aufgabenstellung funktional und verständlich ist und verändern Sie diese ggf.</p> | <p>Sie könnte in Teilschritte unterteilt werden.</p> |